Examen Final
Econometría I
Magíster en Ciencias Económicas
Universidad de Santiago de Chile
Semestre 1, 2018

Soluciones

Nombre de alumna/alumno y firma:	
Pregunta 1 (Máximo 20 puntos)	
Pregunta 2 (Máximo 20 puntos)	
Pregunta 2 (Máximo 20 puntos)	

Instrucciones Generales

1. Tiene 90 minutos para responder a este examen, dividida en 60 puntos.
2. Póngale nombre a todas las hojas.
3. Sólo el profesor puede responder dudas de enunciado, y sólo en voz alta desde el puesto.
4. Se permite el uso de calculadoras, siempre y cuando no cuenten con dispositivos de comunicación.
5. En caso de copia, se sancionará de acuerdo a lo estipulado en el programa del curso.

1. **El Modelo Lineal Clásico** [20 puntos] Nombre y explique todos los supuestos del modelo clásico de regresión lineal. De estos supuestos, elija **dos** que se puede relajar sin perder la habilidad de estimar parametros insesgados o consistentes, y explique cómo se relaja el supuesto en cada caso.
Solución: Aquí es fundamental que se nombran los supuestos de:

   a) Linealidad $y = X\beta + u$

   b) Media condicional nula: $E(u|X) = 0$

   c) Independencia entre observaciones

   d) Homosecedasticidad condicional $V(u|X) = 0$

   e) No multicolinealidad

   (6 puntos) En el modelo clásico NO se supone normalidad de los parametros, esto es un supuesto inferencial.

   De estos supuestos se puede mencionar cualquier de los siguientes supuestos para relajar de la forma descrita a continuación.

   a) Media condicional nula: $E(u|X) = 0$ – se puede relajar suponiendo variables endógenas si se cuenta con una variable instrumental para cada variable endógena.

   b) Independencia entre observaciones – se puede relajar para permitir correlación dentro de grupos ("clusterización")

   c) Homosecedasticidad condicional $V(u|X) = 0$ – se puede relajar para permitir errores heteroscedásticos u otros tipos de dependencias.

   (4 puntos) En cada caso, cuando se explica que se puede relajar el supuesto, es necesario indicar cómo funciona el procedimiento indicado (5 puntos cada uno).

2. **Aplicación Empírica** [20 puntos] Con una muestra de 1000 individuos en el mercado laboral, se estima el modelo de Mincer:

$$salario_i = \beta_1 + \beta_2 educacion_i + \beta_3 experiencia_i + \beta_4 experiencia_i^2 + u_i,$$

   donde *salario* es el salario en miles de pesos, *educacion* es la cantidad de años de educación de la persona, y *experiencia* y *experiencia*^{2} son los años de experiencia laboral y su cuadrado. Al estimar este modelo, el vector de parametros

$\widehat{\beta}_{MCO}$ es:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{MCO} &= \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\beta}_3 & \widehat{\beta}_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 267{,}6 & 41{,}7 & 12{,}9 & -0{,}35 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y la matriz de varianza-covarianza de los parametros es:

$$\widehat{var}(\widehat{\beta}_{MCO}) = \begin{pmatrix} \hat{v}_{11} & \hat{v}_{12} & \hat{v}_{13} & \hat{v}_{14} \\ \hat{v}_{21} & \hat{v}_{22} & \hat{v}_{23} & \hat{v}_{24} \\ \hat{v}_{31} & \hat{v}_{32} & \hat{v}_{33} & \hat{v}_{34} \\ \hat{v}_{41} & \hat{v}_{42} & \hat{v}_{43} & \hat{v}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4049 & -146 & -383 & 10{,}4 \\ -146 & 17{,}3 & 2{,}07 & -0{,}05 \\ -383 & 2{,}07 & 61{,}5 & -1{,}86 \\ 10{,}4 & -0{,}05 & -1{,}86 & 0{,}06 \end{pmatrix}$$

(a) [13 puntos] Compruebe la hipótesis nula que el retorno de experiencia es conjuntamente insignificativo (es decir, $\beta_3 = 0$ y $\beta_4 = 0$) utilizando el test-F matricial. Para contestar esta pregunta, los siguientes resultados podrían ser utiles:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{33} & \hat{v}_{34} \\ \hat{v}_{43} & \hat{v}_{44} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}265 & 8{,}20 \\ 8{,}20 & 270{,}1 \end{pmatrix},$$

y el valor crítico $F_{2,996} = 3{,}00$.

Solución: Nos interesa comprobar la hipotesis nula $H_0 : \beta_3 = 0$ y $\beta_4 = 0$ versus la alternativa $H_1 : H_0$ no es cierto. Bajo la hipotesis nula, sabemos que el estadístico:

$$v = \frac{1}{p}(\hat{\theta} - \theta^0)'[\widehat{V}(\hat{\theta}|X)]^{-1}(\hat{\theta} - \theta^0)$$

sigue una distribución $F_{p,N-K}$. Aquí $\widehat{\theta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_3 \\ \widehat{\beta}_4 \end{pmatrix} = H\widehat{\beta}_{MCO} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widehat{\beta}_{MCO}$, $\theta^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y $\widehat{V}(\hat{\theta}|X) = H\widehat{var}(\widehat{\beta}_{MCO})H'$. Por el enunciado, tenemos que el valor crítico para la región de rechazo es $F_{2,996} = 3{,}00$. Son 2 grados de libertad en el numerador por las dos restricciones de exclusión impuestas en el test de hipótesis, y $N - K = 1000 - 4 = 996$ grados de libertad en el denomindor. Ahora, para calcular el valor del estadístico de prueba es:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\widehat{\beta}_3 - 0\\ \widehat{\beta}_4 0\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\hat{v}_{33} & \hat{v}_{34}\\ \hat{v}_{43} & \hat{v}_{44}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\widehat{\beta}_3 - 0\\ \widehat{\beta}_4 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}12{,}9\\ -0{,}35\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}0{,}265 & 8{,}20\\ 8{,}20 & 270{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12{,}9\\ -0{,}35\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0{,}5485 & 11{,}245\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12{,}9\\ -0{,}35\end{pmatrix}\\
&= 1{,}57.
\end{aligned}$$

Dado que el valor del estadístico de prueba es inferior al valor crítico, no hay evidencia suficiente para rechazar la nula que $\beta_3 = 0$ y $\beta_4 = 0$.

(b) [4 puntos] Ahora, imagine que se sabe que el R^2 del modelo anterior es igual a 0,09266, y el R^2 del modelo:

$$salario_i = \beta_1 + \beta_2 educacion_i + u_i,$$

es igual a 0,08980. Calcule nuevamente el test-F correspondiente a la hipotesis $\beta_3 = 0$ y $\beta_4 = 0$, pero esta vez utilizando la información de los R^2.
Solución: Comprobamos la misma nula versus la misma alternativa (detalles en parte a de la pregunta). Utilizando el R^2, sabemos que el estadístico:

$$v = \left(\frac{N-K}{p}\right)\left(\frac{R_U^2 - R_R^2}{1 - R_U^2}\right)$$

sigue la misma distribución $F_{p,N-K}$ bajo la nula. El R_U^2 es el R^2 del modelo restringido, y el R_R^2 es el R^2 del modelo restringido, que es el modelo donde se imponga la nula que $\beta_3 = \beta_4 = 0$. Ahora, calculando el valor del estadístico de prueba se tiene:

$$v = \left(\frac{996}{2}\right)\left(\frac{0{,}09266 - 0{,}08980}{1 - 0{,}09266}\right) = 1{,}57.$$

De nuevo, dado que $1{,}57 < 3{,}00$, no se rechaza la nula.

(c) [3 puntos] En base a las coeficientes estimadas en el modelo, ¿cómo cambia el salario cuando la experiencia laboral aumenta en un año?
Solución: Aquí experiencia laboral entra como un término cuadrático. Nos interesa saber $\partial salario/\partial experiencia$. En este caso, resolviendo la derivada

nos da:

$$\frac{\partial salario}{\partial experiencia} = \beta_3 + 2 \times \beta_4 experiencia$$

o con las coeficientes estimadas: $12{,}9 - 0{,}7 \times experiencia$. En palabras, esto quiere decir que con cada año adicional de experiencia, el salario aumenta en promedio en 12.900 pesos menos 700 pesos por la cantidad de a nos de experiencia (es decir, retornos decrecientes a experiencia).

3. **Otras Detalles Teóricas** [20 puntos]

(a) [5 puntos] Proponga un estimador de método de momentos que será consistente bajo los supuestos de variables instrumentales. Plantee los momentos poblacionales y los momentos muestrales correspondientes.
Solución: Para plantear un estimador de método de momentos, lo más importante es reconocer que bajo el supuesto de relevancia, los momentos $E[zu] = 0$ en la población. Entonces, los momentos muestrales serán:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i u_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[z_i(y_i - x_i\beta)] = 0$$

donde la β que resolve estos momentos es $\widehat{\beta}_{IV}^{MM}$.

(b) [5 puntos] Con los supuestos clásicos de errores en variables ¿Por qué se dice que el estimador MCO $\widehat{\beta}$ para el modelo $y_i^* = x_i^*\beta + u_i$ sufre un "sesgo de atenuación" cuando no se observa la variable x_i^*, sino una versión medida con error, $x_i = x_i^* + \epsilon_i$?
Solución: Sufre un sesgo de atenuación ya que el parametro estimado siempre será sesgado hacía cero. Para ver esto considere que la probabilidad límite del estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$ es:

$$p\lim \widehat{\beta}_{MCO} = \frac{\beta}{1 + (\sigma_e^2/\sigma_{x^*}^2)}$$

donde el denominador es estíctamente mayor a uno, y por ende produce un sesgo de atenuación.

(c) [5 puntos] ¿Cuál es estimador de White de la varianza asintótica de MCO, y en cuál(es) situación(es) sirve?
Solución: El estimador de la varianza asintótica de White es:

$$\widehat{avar}(\widehat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{u}_i^2 x_i x_i'\right)(X'X)^{-1}$$

y sirve (en muestras asintóticas) para estimar errores estándares, construir intervalos de confianza, y hacer tests de hipótesis robustos a heteroscedasticidad.

(d) [5 puntos] Suponga que se quiere estimar un modelo de variables instrumentales con 2 variables instrumentales y una sola variable endógena. Explique brevamente cómo se puede estimar las coeficientes de interés en este modelo, siendo explícito acerca del estimador utilizado.

Solución: Es necesario en este caso utilizar un estimador de mínimos cuadrados en dos etapas. Este estimador consiste primero en hacer una (o varias) proyección(es) lineal(es) de las variables instrumentales y variables exógenas sobre la(s) variable(s) endógenas, en cada caso calcuando el valor predicho $\widehat{X} = \hat{\pi} Z$. Después se sustituye $\widehat{X}$ en la regresión de interés para estimar las coeficientes β: $y = \widehat{X}\beta + u$.