Trabajo 2: Econometría – Modelos de Regresión Lineal

Universidad de Santiago de Chile
Magíster en Economía
Semestre 1, 2019

1. En los apuntes del curso, hemos definido **exogeneidad estricta** como $E(u|x_1, \ldots, x_k) = E(u|X) = 0$. Demuestra que la exogeneidad estricta implica además las siguientes condiciones:
   (a) $E(u) = 0$
   (b) $E(u_i|x_{jk}) = 0$ para cualquier i, j y k
   (c) $E(u_i x_{jk}) = 0$ para cualquier i, j y k (ortogonalidad de u y x_k)
   (d) $Cov(u_i, x_{jk}) = 0$ para cualquier i, j y k.

2. Consideramos el modelo de regresión lineal definido en los apuntes del curso:

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_K x_{Ki} + u_i.$$

   Aquí, supongamos que los regresores X son no estocásticos, el valor esperado de los errores $E(u_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, N$, y el error es homoscedástico, $Var(u_i) = \sigma^2$.
   (a) Demuestre que $E(\widehat{u}) = 0$ y $V(\widehat{u}) = \sigma^2 M$, donde M es la matrix generadora de residuos.
   (b) Para un vector aleatorio z con $E(z) = \mu$ y $Var(z) = \Sigma$, la variable aleatoria $w = z'z$ tiene $E(w) = tr(\Sigma) + \mu'\mu$, donde $tr(\Sigma)$ refiere a la traza de la matriz (la suma de los elementos en el diagonal principal). Utilice este hecho para demostrar que $E(\widehat{u}'\widehat{u}) = \sigma^2 tr(M)$.
   (c) Demuestre que $tr(M) = N - K$, y por lo tanto, $E(\widehat{u}'\widehat{u}) = \sigma^2(N - K)$.
   (d) Comente el resultado anterior, y especificamente sus implicancias para el estimador de σ^2 proveniente de Minimos Cuadrados Ordinarios.

3. Consideremos la regresión $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + u_i$, y la regresión $x_{2i} = \alpha_1 + \alpha_2 y_i + \varepsilon_i$, donde y_i y x_{2i} son las mismas variables en ambas ecuaciones.
   (a) ¿Cómo se relacionan los parametros α_1, α_2 y el término de error ε_i en la segunda ecuación con los parametros β_1, β_2 y el término de error u_i en la primera ecuación?
   (b) Define el estimador de MCO $\widehat{\alpha}_2$ para el parametro α_2 en la segunda ecuación.
   (c) ¿Cuál es el producto $\widehat{\alpha}_2 \times \widehat{\beta}_2$? ¿Cuál es la cota inferior y la cota superior para este producto? ¿Cómo se relaciona con el R^2 de las dos regresiones indicadas?

4. Últimamente, consideremos el modelo:

$$educ_i = \beta_1^F(D_i) + \beta_1^M(1 - D_i) + \beta_2^F(D_i fert_i) + \beta_2^M[(1 - D_i)fert_i] + x_i'\gamma + u_i$$

   donde $educ_i$ refiere al nivel educacional estandarizada de un(a) niño(a), $fert_i$ mide el tamaño de su familia (su cantidad de hermanos/hermanas), D_i es un indicador binario que toma 1 si la persona es una niña, y 0 si la persona es un niño, y x_i es un vector de controles observables que capturan características del hogar (ingreso, educación de la madre/padre, etc.). ¿Cómo interpretamos las coeficientes $\beta_1^F, \beta_1^M, \beta_2^F$ y β_2^M en este modelo?